

A Transformada de Gabor Sintonizada

José R.A. Torreão[†] e Silvia M.C. Victor

Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense

24210-240 Niterói RJ

Resumo

Neste relatório técnico, nós apresentamos a transformada de Gabor sintonizada e algumas de suas propriedades analíticas, relacionando-a também à transformada de Wigner.

[†] Visitante do Visgraf-IMPA (2009-2010)

Neste relatório, nós apresentamos a transformada de Gabor sintonizada. Esta transformada pode se constituir numa alternativa vantajosa para a análise tempo-frequência de sinais, permitindo analisar diferentes frequências (ou diferentes eventos temporais) com diferentes resoluções, de forma semelhante à transformada wavelet [1]. Nós apresentamos também algumas das propriedades analíticas da transformada de Gabor sintonizada, e as relacionamos àquelas da transformada de Wigner [2].

A. Primeira definição da transformada sintonizada de Gabor:

A primeira formulação da transformada de Gabor sintonizada baseia-se em funções analisadoras da forma

$$\psi_{\omega}(t) = e^{i\omega[t-a(\omega)]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(\omega)}} \quad (1)$$

com

$$\sigma(\omega) = \frac{|\tilde{I}(\omega)|}{(2\pi)^{3/2}} \quad (2)$$

e

$$a(\omega) = -\frac{\varphi_{\tilde{I}}(\omega)}{\omega}, \quad \omega \neq 0 \quad (3)$$

onde $|\tilde{I}(\omega)|$ e $\varphi_{\tilde{I}}(\omega)$ denotam, respectivamente, a amplitude e a fase da transformada de Fourier do sinal analisado, $I(t)$ – ou seja, $\mathcal{F}[I(t)](\omega) = |\tilde{I}(\omega)|e^{i\varphi_{\tilde{I}}(\omega)}$. Quando $\omega = 0$, $a(\omega)$ é definido como zero. Assim, a largura e a fase da função analisadora relacionam-se à magnitude e à fase da transformada de Fourier do sinal analisado. Daí o caráter *sintonizado* da transformada aqui apresentada.

Demonstra-se que as funções $\psi_{\omega}(t)$, originalmente propostas em [3], permitem a representação de qualquer sinal $I(t)$ de quadrado integrável, sob a forma

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} * e^{i\omega[t-a(\omega)]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(\omega)}} \quad (4)$$

onde o asterisco denota uma convolução temporal. Alternativamente, tal representação pode ser reescrita como

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\tau e^{i\omega[t-a(\omega)]} e^{-\frac{(t-\tau)^2}{2\sigma^2(\omega)}} \quad (5)$$

o que equivale a uma expansão de Gabor em que todos os coeficientes são unitários (se uma dada frequência não está presente no sinal, a função de representação correspondente se anula). Estamos considerando, aqui e no que se segue, as seguintes definições para a transformada de Fourier e a sua inversa:

$$\tilde{I}(\omega) \equiv \mathcal{F}[I(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} I(t) \quad (6)$$

e

$$I(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\tilde{I}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \tilde{I}(\omega) \quad (7)$$

O emprego do fator multiplicativo $(1/2\pi)$, na Eq. (7) e não na Eq. (6), é arbitrário, e definições alternativas da transformada de Fourier e da sua inversa poderiam ser utilizadas, sem alterações significativas em nossos resultados.

Usando as funções $\psi_{\omega}(t)$ como funções analisadoras, nós obtemos a primeira definição da transformada de Gabor sintonizada, $T(\omega, t)$, como

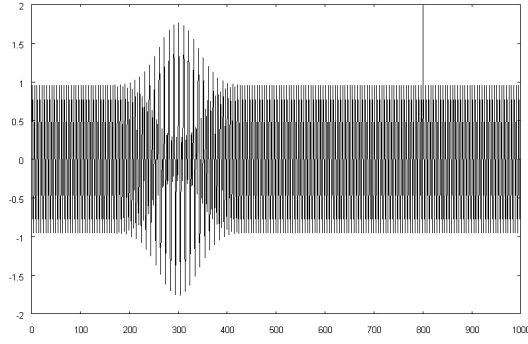
$$T(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega[\tau - a(\omega)]} e^{-\frac{(\tau - t)^2}{2\sigma^2(\omega)}} I(\tau) \quad (8)$$

Já que as funções analisadoras têm largura proporcional à magnitude da transformada de Fourier do sinal, as suas componentes de frequência mais relevantes serão analisadas por funções mais largas no tempo, e, portanto, mais estreitas na frequência. Isto confere à transformada de Gabor sintonizada uma característica semelhante à das transformadas wavelet [1], em que frequências diferentes são analisadas com diferente precisão. Na Gabor sintonizada, são as componentes de maior peso no sinal – medido pelo módulo da sua transformada de Fourier – que são submetidas a uma análise mais fina.

Na Fig. 1, nós apresentamos um exemplo de espectro gerado pela $T(\omega, t)$, especificamente aquele do sinal

$$I(t) = 2\delta(t - 800) + \sin\left[\frac{2\pi}{5}t\right] + e^{-\frac{\pi(t-300)^2}{10000}} \cos\left[\frac{\pi}{5}(t - 300)\right] \quad (9)$$

a



b

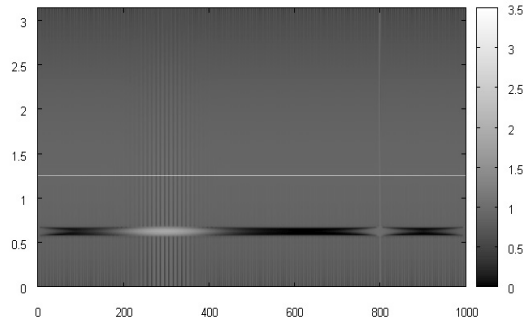


Figura 1: a) Sinal composto pela combinação de uma senóide, um pacote de onda de Gabor, e uma descontinuidade em impulso – ver Eq. (9). b) Espectrograma obtido com a transformada de Gabor sintonizada. Para realçar as pequenas magnitudes, nós apresentamos $|T(\omega, t)|^{1/4}$.

que consiste na combinação de uma senóide, um pacote de onda de Gabor, e uma descontinuidade em impulso. Verifica-se que as três componentes estão bem identificadas no espectrograma.

As seguintes propriedades analíticas da $T(\omega, t)$ podem ser demonstradas:

1. Transformada da delta:

Quando $I(t) = \delta(t - t_0)$,

$$T(\omega, t) = e^{-4\pi^3(t-t_0)^2} \quad (10)$$

Ou seja, a transformada $T(\omega, t)$ provoca um pequeno espalhamento do impulso, que se

torna uma gaussiana com desvio-padrão de $\frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \approx 0.06$.

2. Transformada da exponencial complexa:

Quando $I(t) = e^{i\omega_0 t}$,

$$T(\omega, t) = \delta(\omega - \omega_0) \equiv \frac{\tilde{I}(\omega)}{2\pi} \quad (11)$$

Ou seja, a transformada $T(\omega, t)$ é proporcional à transformada de Fourier da exponencial complexa. Não há espalhamento em frequência.

3. Energia:

A densidade de energia em frequência, $|\tilde{I}(\omega)|^2$, pode ser obtida como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt T(\omega, t) = \frac{|\tilde{I}(\omega)|^2}{2\pi} \quad (12)$$

de onde também resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega dt T(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\tilde{I}(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt |I(t)|^2 \quad (13)$$

usando-se o teorema de Parseval, para a segunda igualdade.

4. Correlação temporal:

Como $|I(\omega)|^2$ é a transformada de Fourier da correlação temporal, nós obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\tau e^{i\omega t} T(\omega, \tau) = (I \star I)(t) \quad (14)$$

onde a correlação é definida como

$$(I \star I)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau I^*(\tau) I(\tau + t) \quad (15)$$

5. Momentos da frequência:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega dt \omega^n T(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^n |\tilde{I}(\omega)|^2 \quad (16)$$

6. Translação temporal:

Se $I_2(t) = I(t - t_0)$,

$$T_{I_2}(\omega, t) = T(\omega, t - t_0) \quad (17)$$

7. Translação na frequência:

Se $I_2(t) = e^{i\omega_0 t} I(t)$,

$$T_{I_2}(\omega, t) = T(\omega - \omega_0, t) \quad (18)$$

8. Inversa:

$$\tilde{I}(\omega) = 2\pi \frac{\mathcal{F}[e^{i\omega_0[t-a(\omega_0)]} T(\omega_0, t)](\omega)}{|\tilde{I}(\omega_0)| e^{-\frac{|\tilde{I}(\omega_0)|^2}{2(2\pi)^3} (\omega - \omega_0)^2}} \quad (19)$$

onde

$$|\tilde{I}(\omega_0)|^2 = 2\pi \mathcal{F}[T(\omega_0, t)](\omega = 0) \quad (20)$$

e onde ω_0 é uma frequência fixa.

Este resultado indica que, a partir da transformada sintonizada de Gabor, é possível recuperar a transformada de Fourier do sinal, desde que se conheça a *fase* desta última em uma dada frequência (devido ao fator $e^{-i\omega_0 a(\omega_0)} \equiv e^{i\varphi_{\tilde{I}}(\omega_0)}$, no numerador da Eq. (19)).

9. Momento condicional do tempo:

Por definição [2], o primeiro momento condicional do tempo é dado por

$$\langle t \rangle_\omega = \frac{1}{|\tilde{I}(\omega)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt t T(\omega, t) \quad (21)$$

o que resulta em

$$\langle t \rangle_\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\omega} \left[-\varphi_{\tilde{I}}(\omega) + i \log |\tilde{I}(\omega)| \right] \quad (22)$$

onde $\varphi_{\tilde{I}}(\omega)$ é a fase da transformada de Fourier do sinal.

Portanto, $\langle t \rangle_\omega$ fornece o *retardo de grupo* do sinal, $\varphi'_{\tilde{I}}(\omega)$, como

$$\varphi'_{\tilde{I}}(\omega) = -2\pi \text{Re}\{\langle t \rangle_\omega\} \quad (23)$$

10. Momento cruzado do tempo e da frequência:

$$\langle t\omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega dt \omega t T(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau \varphi'_I(\tau) |I(\tau)|^2 + i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau |I(\tau)| \frac{d}{d\tau} |I(\tau)| \quad (24)$$

de onde se obtém

$$\langle t\varphi'_I(t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau \varphi'_I(t) |I(\tau)|^2 = \text{Re}\{\langle t\omega \rangle\} \quad (25)$$

onde $\varphi_I(t)$ é a fase do sinal – ou seja, $I(t) = |I(t)|e^{i\varphi_I(t)}$ –, e, portanto, $\varphi'_I(t)$ é a sua *frequência instantânea*.

A grandeza $\langle t\varphi'_I(t) \rangle$ está relacionada à covariância do sinal [2], como

$$\langle t\varphi'_I(t) \rangle = \text{Cov}_{t\omega} + \langle t \rangle \langle \omega \rangle \quad (26)$$

No que se segue, nós introduzimos uma formulação alternativa para a transformada sintonizada de Gabor, e apresentamos algumas de suas propriedades.

B. Segunda definição da transformada sintonizada de Gabor:

É possível verificar que uma representação semelhante à da Eq. (4) pode ser obtida para a transformada de Fourier de qualquer sinal de quadrado integrável, sob a forma

$$\tilde{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} * e^{-i[\omega-\alpha(t)]t} e^{-\frac{\Sigma^2(t)}{2}\omega^2} \quad (27)$$

ou, alternativamente,

$$\tilde{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt d\Omega e^{-i[\omega-\alpha(t)]t} e^{-\frac{\Sigma^2(t)}{2}(\omega-\Omega)^2} \quad (28)$$

com o asterisco, na primeira relação, denotando uma convolução *em frequência*, e com

$$\Sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{|I(t)|} \quad (29)$$

e

$$\alpha(t) = \frac{\varphi_I(t)}{t}, \quad t \neq 0 \quad (30)$$

onde $|I(t)|$ e $\varphi_I(t)$ denotam, respectivamente, a amplitude e a fase do sinal considerado, $I(t)$ – ou seja, $I(t) = |I(t)|e^{i\varphi_I(t)}$. Quando $t = 0$, $\alpha(t)$ é definido como zero.

Podemos, portanto, definir uma segunda forma para a transformada de Fourier sintonizada, $T^{(2)}(\omega, t)$, com base nas funções de representação

$$\psi_t(\omega) = e^{-i[\omega-\alpha(t)]t} e^{-\frac{\Sigma^2(t)}{2}\omega^2} \quad (31)$$

Tomando-as como funções analisadoras, nós obtemos

$$T^{(2)}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{i[\Omega-\alpha(t)]t} e^{-\frac{\Sigma^2(t)}{2}(\Omega-\omega)^2} \tilde{I}(\Omega) \quad (32)$$

A Fig. 2 apresenta o espectro obtido com a segunda versão da transformada de Gabor sintonizada, para o mesmo sinal considerado na Fig. 1. Observa-se, em comparação com esta última, que é possível obter uma maior resolução temporal, com a identificação mais precisa da descontinuidade em impulso e do pacote de onda de Gabor, mas isto ao preço de uma menor resolução em frequência. No caso da $T^{(2)}$, quanto maior a intensidade do

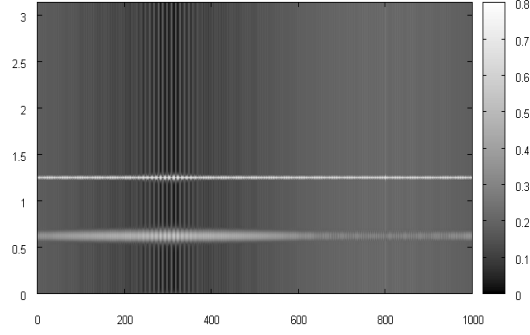


Figura 2: Espectrograma do sinal da Eq.(9), obtido com a transformada de Gabor sin-tonizada $T^{(2)}$. Para realçar as pequenas magnitudes, apresentamos $|T^{(2)}(\omega, t)|^{1/4}$.

sinal, mais larga é a janela em frequência (ver Eq. (29)), e, conseqüentemente, mais fina é a resolução temporal.

As seguintes propriedades podem ser demonstradas para a $T^{(2)}$:

1. Transformada da delta:

Quando $I(t) = \delta(t - t_0)$,

$$T^{(2)}(\omega, t) = \delta(t - t_0) \quad (33)$$

Ou seja, não há espalhamento do impulso.

2. Transformada da exponencial complexa:

Quando $I(t) = e^{i\omega_0 t}$,

$$T^{(2)}(\omega, t) = 2\pi e^{-\pi(\omega - \omega_0)^2} \quad (34)$$

Ou seja, há um pequeno espalhamento gaussiano na frequência, com desvio-padrão de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.399$.

3. Energia:

A densidade temporal de energia do sinal, $|I(t)|^2$, pode ser obtida como

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega T^{(2)}(\omega, t) = 2\pi |I(t)|^2 \quad (35)$$

de onde também resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega dt T^{(2)}(\omega, t) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt |I(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\tilde{I}(\omega)|^2 \quad (36)$$

usando-se o teorema de Parseval, para a segunda igualdade.

4. Correlação em frequência:

Como $2\pi|I(t)|^2$ é a transformada de Fourier inversa de $(\tilde{I} \star \tilde{I})(\omega)$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega dt e^{-i\omega t} T^{(2)}(\Omega, t) = (\tilde{I} \star \tilde{I})(\omega) \quad (37)$$

onde a correlação é aqui definida como

$$(\tilde{I} \star \tilde{I})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \tilde{I}^*(\Omega) \tilde{I}(\Omega + \omega) \quad (38)$$

5. Momentos do tempo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega dt t^n T^{(2)}(\omega, t) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt t^n |I(t)|^2 \quad (39)$$

6. Translação temporal:

Se $I_2(t) = I(t - t_0)$,

$$T_{I_2}^{(2)}(\omega, t) = T^{(2)}(\omega, t - t_0) \quad (40)$$

7. Translação na frequência:

Se $I_2(t) = e^{i\omega_0 t} I(t)$,

$$T_{I_2}^{(2)}(\omega, t) = T^{(2)}(\omega - \omega_0, t) \quad (41)$$

8. Inversa:

$$I(t) = \frac{\mathcal{F}^{-1}[e^{-i[\omega - \alpha(t_0)]t_0} T^{(2)}(\omega, t_0)](t)}{|I(t_0)| e^{-\frac{|I(t_0)|^2}{4\pi}(t-t_0)^2}} \quad (42)$$

onde

$$|I(t_0)|^2 = \mathcal{F}^{-1}[T^{(2)}(\omega, t_0)](t = 0) \quad (43)$$

e onde t_0 é um instante fixo.

Este resultado indica que é possível recuperar o sinal a partir da sua transformada sintonizada de Gabor, $T^{(2)}$, desde que se conheça a fase do sinal num dado instante (devido ao fator $e^{i\alpha(t_0)t_0} \equiv e^{i\varphi_I(t_0)}$, no numerador da Eq. (42)). Para sinais reais, como a fase é nula, a obtenção da inversa é sempre possível.

9. Momento condicional da frequência:

Por definição [2], o primeiro momento condicional da frequência é dado por

$$\langle \omega \rangle_t = \frac{1}{|I(t)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega T^{(2)}(\omega, t) \quad (44)$$

o que resulta em

$$\langle \omega \rangle_t = 2\pi \frac{d}{dt} [\varphi_I(t) - i \log |I(t)|] \quad (45)$$

onde $\varphi_I(t)$ é a fase do sinal.

Portanto, $\langle \omega \rangle_t$ fornece a *frequência instantânea* do sinal, $\varphi'_I(t)$, como

$$\varphi'_I(t) = \frac{1}{2\pi} \text{Re}\{\langle \omega \rangle_t\} \quad (46)$$

10. Momento cruzado do tempo e da frequência:

$$\langle t\omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega dt \omega t T^{(2)}(\omega, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \Omega \varphi'_I(\Omega) |\tilde{I}(\Omega)|^2 - i \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \Omega |\tilde{I}(\Omega)| \frac{d}{d\Omega} |\tilde{I}(\Omega)| \quad (47)$$

de onde se obtém

$$\langle \omega \varphi'_I(\omega) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \Omega \varphi'_I(\Omega) |\tilde{I}(\Omega)|^2 = -\text{Re}\{\langle t\omega \rangle\} \quad (48)$$

onde $\varphi'_I(\omega)$ é o retardo de grupo do sinal.

C. Relação com a transformada de Wigner:

As propriedades arroladas para a transformada de Gabor sintonizada encontram correlatas entre as propriedades da transformada de Wigner [2], definida como

$$W(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau I^*(t - \tau/2) I(t + \tau/2) e^{-i\omega\tau} \quad (49)$$

ou, equivalentemente,

$$W(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \tilde{I}^*(\omega + \Omega/2) I(\omega - \Omega/2) e^{-i\Omega t} \quad (50)$$

Por exemplo, para a transformada de Wigner valem as relações

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt W(\omega, t) = |I(\omega)|^2 \quad (51)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega W(\omega, t) = |I(t)|^2 \quad (52)$$

que têm correlatas, respectivamente, nas transformadas de Gabor sintonizadas $T(\omega, t)$ (ver Eq. (12)), e $T^{(2)}(\omega, t)$ (ver Eq. (35)).

Na transformada de Wigner, o próprio sinal é usado como função analisadora, e isto proporciona inúmeras vantagens, como, por exemplo, o fato de as duas versões da transformada – em termos de integrais no tempo ou na frequência (Eqs. (49) ou (50)) – serem idênticas. De modo geral, verifica-se que metade das propriedades analíticas da transformada de Wigner são replicadas por uma das transformadas de Gabor sintonizadas, T ou $T^{(2)}$, e a outra metade, pela outra. Uma desvantagem da transformada de Wigner, no entanto, é a de ser quadrática no sinal, o que leva à geração de termos cruzados e à possibilidade de introdução de elementos espúrios no espectro, mesmo para sinais simples, como a soma de duas senóides (ver Fig. 3a). Isto não acontece com as transformadas de Gabor sintonizadas (Figs. 3b e 3c), apesar de estas, de uma certa forma, também se basearem no emprego do próprio sinal como sua função analisadora. De fato, é possível

verificar que, localmente na frequência, a função analisadora $\psi_\omega(t)$ é equivalente ao sinal $I(t)$: tomando a sua transformada de Fourier, nós obtemos

$$\mathcal{F}[\psi_\omega(t)](\omega') = \frac{1}{2\pi} \tilde{I}(\omega) e^{-\frac{|\tilde{I}(\omega)|^2}{2(2\pi)^3}(\omega-\omega')^2} \quad (53)$$

e, portanto,

$$\mathcal{F}[\psi_\omega(t)](\omega' = \omega) = \frac{1}{2\pi} \tilde{I}(\omega) \quad (54)$$

ou seja, o conteúdo da função analisadora da transformada $T(\omega, t)$, na frequência ω , é o mesmo do sinal. De forma semelhante, é possível mostrar que, localmente no tempo, a função analisadora de $T^{(2)}$, $\psi_t(\omega)$, equivale a $I(t)$: tomando a sua transformada de Fourier inversa, nós obtemos

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi_t(\omega)](t') = \frac{1}{2\pi} I(t) e^{-\frac{|I(t)|^2}{4\pi}(t-t')^2} \quad (55)$$

e, portanto,

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi_t(\omega)](t' = t) = \frac{1}{2\pi} I(t) \quad (56)$$

Levando em consideração o fato de que as funções analisadoras da transformada de Gabor sintonizada são representações locais do sinal, podemos relacionar esta transformada à *transformada cruzada de Wigner* entre o sinal e a função analisadora, obtendo, no caso da transformada T ,

$$T(\omega, 2t) = \pi W_{\psi_\omega, I}(\omega, t) \quad (57)$$

onde definimos $W_{\psi_\omega, I}(\omega, t)$ como a transformada cruzada de Wigner entre $\psi_\omega(t)$ e $I(t)$, ou seja,

$$W_{\psi_\omega, I}(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \psi_\omega^*(t - \tau/2) I(t + \tau/2) e^{-i\omega\tau} \quad (58)$$

No caso da transformada $T^{(2)}$, a relação é

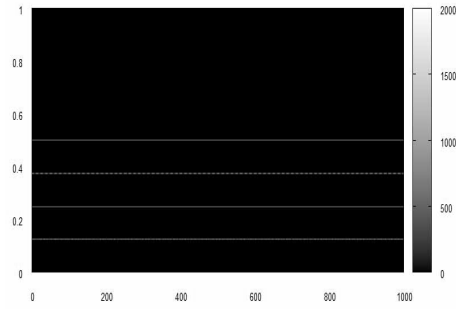
$$T^{(2)}(2\omega, t) = \pi W_{\psi_t, I}(\omega, t) \quad (59)$$

onde definimos

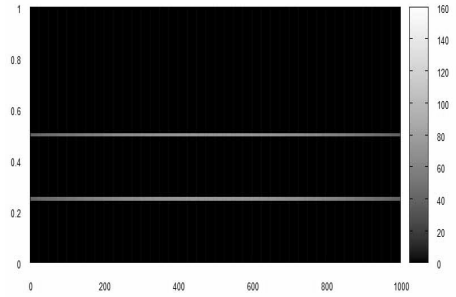
$$W_{\psi_t, I}(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \psi_t^*(\omega + \Omega/2) \tilde{I}(\omega - \Omega/2) e^{-i\Omega t} \quad (60)$$

como a transformada cruzada de Wigner entre $\psi_t(\omega)$ e $\tilde{I}(\omega)$.

a



b



c

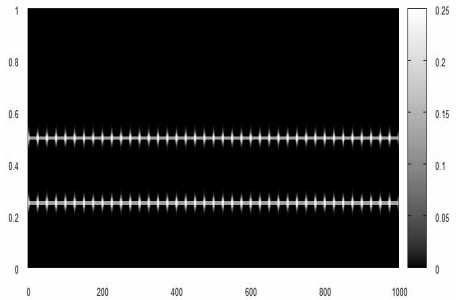


Figura 3: Espectros do sinal $\cos(\frac{8\pi}{100}t) + \cos(\frac{16\pi}{100}t)$, obtidos a partir da transformada de Wigner (a) e das versões T e $T^{(2)}$ da transformada de Gabor sintonizada – (b) e (c), respectivamente. Por ser quadrática, a transformada de Wigner gera termos de frequência espúrios, que não estão presentes nos espectros da Gabor sintonizada. Como já comentado, a resolução em frequência da $T^{(2)}$ é inferior à da T . Em (c), o padrão sobre as linhas correspondentes às frequências do sinal deve-se à grande variação em amplitude deste: como as frequências são analisadas por funções cuja largura é proporcional à magnitude do sinal (Eq. (29)), a resolução será tanto pior quanto maior for ele. Os picos sobre as linhas horizontais correspondem, portanto, aos máximos do sinal. Ao preço de uma menor resolução em frequência, a $T^{(2)}$ preserva informação temporal do sinal analisado.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing – The Sparse Way*, Third Edition, Academic Press, 2009.
- [2] L. Cohen, *Time-Frequency Analysis*, Third Edition, Prentice Hall PTR, 1995.
- [3] J.L. Fernandes, *Shape-from-shading: Novas abordagens a partir de movimento e de foco*, Tese de Doutorado, Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, 2006. Disponível em http://www.ic.uff.br/PosGraduacao/lista_teses.php?ano=2006.