SOBRE O NÚMERO DE NÚMEROS PRIMOS INFERIORES A UMA DETERMINADA QUANTIDADE.

(Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.)

Bernhard Riemann.

Traduzido por Júlio C. Andrade.

[Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.]

Versão traduzida em comemoração aos 150 anos da Hipótese de Riemann.

SOBRE O NÚMERO DE NÚMEROS PRIMOS INFERIORES A UMA DETERMINADA QUANTIDADE.

BERNHARD RIEMANN

Acredito que eu possa melhor transmitir os meus agradecimentos pela honra a qual a Academia tem a algum grau conferido a mim, através da minha admissão como um dos seus correspondentes, se eu rapidamente fizer uso da permissão assim recebida para comunicar uma investigação sobre a acumulação dos números primos; um tópico o qual talvez pareça não inteiramente sem mérito de tal comunicação, dado o interesse que o próprio Gauss e Dirichlet mostraram sobre este assunto durante um longo período.

Para esta invetigação meu ponto de partida é provido pela observação de *Euler* de que o produto

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

se substituirmos para p todos os números primos, e para n todos os números inteiros não–negativos. A função de variável complexa s o qual é representada por estas duas expressões, onde quer que elas convirjam, eu denoto por $\zeta(s)$. Ambas as expressões convergem apenas quando a parte real de s é maior do que 1; ao mesmo tempo uma expressão para a função pode ser facilmente encontrada o qual permanece sempre válida. Fazendo uso da equação

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1} = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

primeiro vemos que

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx.$$

Se agora considerarmos a integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx$$

de $+\infty$ a $+\infty$ calculada em um sentido positivo em torno de um domínio o qual inclua o valor 0 mas nenhum outro ponto de descontinuidade do integrando em seu interior, então isso é facilmente visto ser igual a

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx,$$

Date: 12 de Março de 2009.

desde que, na função a vários valores $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$, o logaritmo de $-x$ é determinado, de modo a ser real quando x é negativo. Conseqüentemente

$$2\sin \pi s \Pi(s-1)\zeta(s) = i\int_{\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1}dx,$$

onde a integral tem o significado já especificado.

Esta equação agora nos fornece o valor da função $\zeta(s)$ para todos os números complexos s e nos mostra que esta função é uma função escalar e finita para todos os valores finitos de s, com a exceção de 1, e também que ela é zero se s é um inteiro par negativo.

Se a parte real de s é negativa, então, em vez de ser calculada em um sentido positivo ao redor do domínio especificado, esta integral pode também ser calculada em um sentido negativo ao redor daquele domínio que contém todas as quantidades complexas remanescentes, visto que a integral calculada apesar de valores infinitamente grandes em módulo ela é então infinitamente pequena. Entretanto, no interior deste domínio, o integrando tem descontinuidades apenas onde x se torna igual a um múltiplo inteiro de $\pm 2\pi i$, e a integral é assim igual a soma das integrais calculadas em um sentido negativo ao redor destes valores. Mas a integral ao redor do valor $n2\pi i$, é $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, obtemos disto

$$2\sin \pi s \Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}((-i)^{s-1} + i^{s-1}),$$

assim uma relação entre $\zeta(s)$ e $\zeta(1-s)$, que, através do uso de propriedades conhecidas da função Π pode ser expressada como se segue:

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

permanece inalterada quando s é substituído por $1-s$.

Esta propriedade da função induziu-me a introduzir, no lugar de $\Pi(s-1)$, a integral $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ no termo geral da série $\sum \frac{1}{n^s}$, pelo qual nós obtemos uma expressão muito conveniente para a função $\zeta(s)$. De fato

$$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{\infty} e^{-nn\pi x} x^{\frac{s}{2}-1}dx,$$

assim, se estabelecermos

$$\sum_1^{\infty} e^{-nn\pi x} = \psi(x)$$

então

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^{\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1}dx,$$

ou uma vez que

$$2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right), \quad \text{(Jacobi, Fund. S. 184)}$$

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) &= \int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx + \int_1^\infty \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}dx + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx = \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.\end{aligned}$$

Agora eu defino $s = \frac{1}{2}+ti$ e

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t),$$

de modo que

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(tt+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx$$

ou, ainda,

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx.$$

Esta função é finita para todos os valores finitos de t, e permite-se a ser desenvolvida em potências de tt como uma série rapidamente convergente. Uma vez que, para um valor de s cuja parte real é maior do que 1, $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ permanece finito, e visto que o mesmo é válido para os logaritmos dos outros fatores de $\xi(t)$, segue-se que a função $\xi(t)$ só pode se anular se a parte imaginária de t situa-se entre $\frac{1}{2}i$ e $-\frac{1}{2}i$. O número de raízes de $\xi(t)=0$, cujas partes real situam-se entre 0 e T é aproximadamente

$$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

pois a integral $\int d\log\xi(t)$, calculada em um sentido positivo em torno da região consistindo dos valores de t cuja as partes imaginárias econtram-se entre $\frac{1}{2}i$ e $-\frac{1}{2}i$ e cuja as partes reais encontram-se entre 0 e T, é (até uma fração da ordem de magnitude da quantidade $\frac{1}{T}$) igual a $\left(T\log\frac{T}{2\pi}-T\right)i$; esta integral entretanto é igual ao número de raízes de $\xi(t)=0$ situadas dentro da região, multiplicado por $2\pi i$. Nós agora encontramos, de fato aproximadamente, este número de raízes reais dentro destes limites, e é muito provável que todas as raízes sejam reais. Certamente seria desejável uma prova mais rigorosa aqui; eu tenho, entretanto, temporariamente posto de lado a busca por isto após algumas breves tentativas fracassadas, pois me parece desnecessário para o próximo objetivo de minha investigação.

Se denotarmos por α todas as raízes da equação $\xi(\alpha) = 0$, podemos expressar $\log \xi(t)$ como

$$\sum \log \left(1 - \frac{tt}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0);$$

pois, uma vez que a densidade de raízes da variável t cresce com t apenas como $\log \frac{t}{2\pi}$, segue-se que esta expressão converge e torna-se para um t infinito somente infinita para $t \log t$; assim ela difere de $\log \xi(t)$ por uma função de tt, que para um t finito permanece contínua e finita e, quando dividida por tt, torna-se infinitamente pequena para t infinito. Esta diferença é conseqüentemente uma constante, cujo valor pode ser determinado através da colocação de $t = 0$.

Com a ajuda destes métodos, o número de números primos que são menores do que x pode agora ser determinado.

Seja $F(x)$ igual a este número quando x não é exatamente igual a um número primo; mas deixe $F(x)$ ser maior por $\frac{1}{2}$ quando x é um número primo, a fim de que, para qualquer x em que existe um salto no valor de $F(x)$,

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}.$$

Se na identidade

$$\log \zeta(s) = -\sum \log(1 - p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2}\sum p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum p^{-3s} + \cdots$$

agora substituirmos

$$p^{-s} \quad \text{por} \quad s\int_p^\infty x^{-s-1} ds, \quad p^{-2s} \quad \text{por} \quad s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1} ds, ...,$$

obteremos

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x) x^{-s-1} dx,$$

se denotarmos

$$F(x) + \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

por $f(x)$.

Esta equação é válida para cada valor complexo $a + bi$ de s para o qual $a > 1$. Se, porém, a equação

$$g(s) = \int_0^\infty h(x) x^{-s} d\log x$$

é válida neste domínio, então, fazendo uso do teorema de *Fourier*, podemos expressar a função h em termos da função g. A equação decompõem-se, se $h(x)$ é real e

$$g(a+bi) = g_1(b) + ig_2(b),$$

nas duas seguintes:

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x)x^{-a}\cos(b\log x)d\log x,$$

$$ig_2(b) = -i\int_0^\infty h(x)x^{-a}\sin(b\log x)d\log x.$$

Se multiplicarmos ambas equações com

$$(\cos(b\log y) + i\sin(b\log y))\,db$$

e integrar elas de $-\infty$ a $+\infty$, então obtemos $\pi h(y)y^{-\alpha}$ do lado direito em ambas, por causa dos teoremas de *Fourier*; assim, se adicionarmos ambas equações e multiplicarmos elas por iy^α, obtemos

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)y^s ds,$$

onde a integração é realizada de modo que a parte real de s permaneça constante.

Para um valor de y em que haja um salto no valor de $h(y)$, a integral assume a média dos valores da função h em ambos os lados do salto. Da forma em que a função f foi definida, vemos que ela têm a mesma propriedade e, portanto, em plena generalidade

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log\zeta(s)}{s} y^s ds.$$

Podemos substituir para $\log\zeta(s)$ a expressão

$$\frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1) - \log\Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \sum\nolimits^\alpha \log\left(1 + \frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^s}{\alpha\alpha}\right) + \log\xi(0)$$

encntrada anteriormente; contudo as integrais de cada um dos termos desta expresão não convergem, quando extendida ao infinito, razão pela qual é apropriado converter a equação anterior por meio da integração por partes em

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds} x^s ds$$

Uma vez que

$$-\log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \lim \left(\sum_{n=1}^{n=m} \log\left(1+\frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2}\log m\right),$$

para $m=\infty$ e portanto

$$-\frac{d\frac{1}{s}\log \Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_{1}^{\infty} \frac{d\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)}{ds},$$

segue-se então que todos os termos da expressão para $f(x)$, com excessão de

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{ss}\log \xi(0) x^s ds = \log \xi(0),$$

assumem a forma

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds} x^s ds.$$

Mas agora

$$\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{d\beta} = \frac{1}{(\beta-s)\beta},$$

e, se a parte real de s é maior do que a parte real de β,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s}{(\beta-s)\beta} ds = \frac{x^\beta}{\beta} = \int_{\infty}^{x} x^{\beta-1}dx,$$

ou,

$$= \int_{0}^{x} x^{\beta-1}dx,$$

dependendo se a parte real de β é negativa ou positiva. Temos como resultado

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds} x^s ds$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right) x^s ds \\ &= \int_{\infty}^{x} \frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx + \text{const.} \end{aligned}$$

no primeiro, e

$$= \int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x} dx + \text{const.}$$

no segundo caso.

No primeiro caso a constante de integração é determinada se deixarmos a parte real de β tornar-se infinitamente negativa; no segundo caso a integral de 0 até x assume valores separados por $2\pi i$, dependendo se a integração é calculada através de valores complexos com argumento positivo ou negativo, e torna-se infinitamente pequena, para o antigo caminho, quando o coeficiente de i no valor de β se torna infinitamente positivo, mas para a última, quando este coeficiente se torna infinitamente negativo. Disto é visto como o lado esquerdo $\log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)$ deve ser determinado a fim de que as constantes de integração desapareçam.

Através da inserção destes valores na expressão para $f(x)$ obtemos

$$f(x) = Li(x) - \sum^{\alpha} \left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) + \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2-1} \frac{dx}{x \log x} + \log \xi(0),$$

se em $\sum^{\alpha}$ substituirmos para α todas as raízes positivas (ou raízes tendo uma parte real positiva) da equação $\xi(\alpha) = 0$, ordenadas pela sua magnitude. Pode ser facilmente demonstrado, por meios de uma discussão mais profunda da função ξ, que, com esta ordenação dos termos o valor da série

$$\sum \left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) \log x$$

está de acordo com o valor limite para o qual

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} \frac{d\frac{1}{s} \sum \log\left(1 + \frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha\alpha}\right)}{ds} x^s ds$$

converge quando a variável b aumenta sem limites; entretanto quando reordenado ela pode assumir qualquer valor real arbitrário.

De $f(x)$ obtemos $F(x)$ pela relação de inversão

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} F\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

para obter a equação

$$F(x) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

no qual substituimos para m a série consistindo daqueles números naturais que não são divisíveis por qualquer quadrado além de 1, e no qual μ denota o número de fatores primos de m.

Se restringirmos $\sum^{\alpha}$ a um número finito de termos, então a derivada da expressão para $f(x)$ ou, até uma fração diminuindo muito rapidamente com x crescendo,

$$\frac{1}{\log x} - 2\sum^{\alpha} \frac{\cos(\alpha \log x)x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$$

nos fornecem uma expressão aproximada para a densidade de números primos + a metade da densidade dos quadrados dos números primos + um terço da densidade dos cubos dos números primos etc. na magnitude x.

A expressão aproximada conhecida $F(x) = Li(x)$ é portanto válida até quantidades da ordem de $x^{\frac{1}{2}}$ e nos fornecem um valor muito grande; pois os termos não-periódicos na expressão para $F(x)$ são, exceto para as quantidades que não crescem infinito com x:

$$Li\,(x) - \frac{1}{2}Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}Li\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5}Li\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6}Li\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - \frac{1}{7}Li\left(x^{\frac{1}{7}}\right) + \cdots$$

De fato, na comparação de $Li(x)$ com o número de primos menores do que x, empreendidas por *Gauss* e *Goldschmidt* e levadas adiante até $x =$ três milhões, este número tem–se mostrado, na primeira centena de milhares, sempre menor do que $Li(x)$; de fato a diferença aumenta, com muitas oscilações, gradualmente com x. Mas também o aumento e a diminuição na densidade de primos de lugar para lugar que é dependente dos termos periódicos já tem animado a atenção, sem que, contudo, qualquer lei governando este comportamento tenha sido observada. Em qualquer futura contagem seria interessante manter o rastro da influência dos termos periódicos individuais na expressão para a densidade de números primos. Um comportamento mais regular do que $F(x)$ será exibido pela função $f(x)$, que já na primeira centena é visto muito distintamente, coincidir em média com $Li(x) + \log \xi(0)$.

Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística – IME–USP, Universidade de São Paulo – CEP 05508-090, São Paulo – SP – Brasil.

E-mail address: juliocba@ime.usp.br