Generalizando a Transformada de Gabor Sintonizada

José R.A. Torreão

Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense

24210-240 Niterói RJ

Resumo

Neste relatório, nós demonstramos como o formalismo de representação e análise de sinais com base em funções de Gabor sintonizadas, introduzido em [1], pode ser generalizado com o uso da transformada fracional de Fourier.

† Visitante do Visgraf-IMPA (2009-2010)

1 Introdução

A transformada de Gabor sintonizada foi recentemente introduzida, em [1], como uma alternativa possivelmente vantajosa para a análise tempo-frequência de sinais. Naquele trabalho, dado um sinal *temporal* de quadrado integrável, propôs-se analisá-lo por meio de núcleos de Gabor cuja largura e fase são obtidas da *transformada de Fourier* do sinal. Analogamente, dado um sinal no *domínio da frequência*, foi proposta a sua análise por núcleos de Gabor cuja largura e fase são obtidas da *transformada de Fourier inversa* do sinal. Em ambos os casos, demonstrou-se que as funções analisadoras fornecem uma representação exata do sinal analisado $-$ no primeiro caso, em termos de uma expansão equivalente à transformada *inversa* de Fourier, e, no segundo, em termos de uma expansão equivalente à transformada de Fourier. Tal fato proporciona à abordagem de Gabor sintonizada propriedades semelhantes às da transformada de Wigner, que utiliza o próprio sinal como função analisadora, e é considerada ótima sob vários aspectos [2].

O propósito do presente relatório é demonstrar que a abordagem introduzida em [1] pode ser formalmente generalizada com o uso da *transformada fracional de Fourier* [3], que é uma extensão da transformada de Fourier, incluindo a esta e à transformada de Fourier inversa como casos particulares.

A transformada fracional de Fourier de um sinal $x(t)$ é definida como

$$X_\alpha(u) \equiv \mathrm{FRFT}_\alpha\{x(t)\} = \sqrt{\frac{1 - j\cot\alpha}{2\pi}}\, e^{j\frac{\cot\alpha}{2}u^2} \int x(t) e^{j\frac{t^2}{2}\cot\alpha - jtu\csc\alpha} dt \qquad (1)$$

onde a integral é tomada de $-\infty$ a ∞. Aqui, $j^2 = -1$, e t, u e o parâmetro angular α (dado em radianos) são adimensionais.

Verifica-se que, para k inteiro, quando $\alpha = 2k\pi$, $X_\alpha(u) = x(u)$ $-$ ou seja, neste caso a FRFT retorna o próprio sinal $-$, e quando $\alpha = (2k+1)\pi$, $X_\alpha(u) = x(-u)$. Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, obtém-se a transformada de Fourier,

$$X_{\frac{\pi}{2}}(u) \equiv \tilde{X}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x(t) e^{-jtu} dt \qquad (2)$$

A aplicação de duas transformadas fracionais de Fourier sucessivas, com ângulos α e β, equivale à aplicação de uma única transformada com ângulo $\alpha + \beta$, e a inversa de uma FRFT com ângulo α é a FRFT com ângulo $-\alpha$. Estas e outras propriedades permitem interpretar a FRFT como uma rotação da representação do sinal no plano tempo-frequência, com o ângulo de rotação definido pelo parâmetro α. A transformada fracional de Fourier encontra aplicações na análise de sinais e em inúmeras outras áreas, como a óptica e a mecânica quântica [4].

2 Generalizando a Abordagem Sintonizada

Aqui nós propomos generalizar a abordagem sintonizada de Gabor, fazendo uso da transformada fracional de Fourier. As duas definições para a transformada sintonizada, introduzidas em [1], surgirão − juntamente com as funções de representação associadas − como casos particulares do formalismo desenvolvido a seguir. Deve-se notar, no entanto, que, por estarmos utilizando certas convenções usualmente adotadas com relação à FRFT, e que diferem das assumidas em [1] (por exemplo, ali, a transformada de Fourier foi definida sem o fator multiplicativo de $1/\sqrt{2\pi}$ − ver Eq. (2)), os resultados anteriores podem não ser recuperados exatamente sob a mesma forma. As diferenças, em todo caso, são qualitativamente irrelevantes.

2.1 Representação Generalizada

Dado o sinal $i(t)$, nós propomos a representação da sua transformada fracional de Fourier para um ângulo β qualquer (suposta existente), como

$$I_\beta(t) \equiv \mathrm{FRFT}_\beta\{i(t')\}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - j\cot\alpha}} \int x_\alpha(t, u') \star y_\alpha^\beta(t, u') e^{j\frac{\cot\alpha}{2}u'^2} du' \tag{3}$$

onde $x_\alpha(t, u)$, referida como a *função de base* da representação, define-se como

$$x_\alpha(t, u) = |\csc\alpha| \sqrt{\frac{2\pi}{1 - j\cot\alpha}} e^{-j\left(\frac{t^2+u^2}{2}\right)\cot\alpha + jtu\csc\alpha} \tag{4}$$

enquanto $y_\alpha(t,u)$, referida como a *função de representação* ou *função codificadora*, assume a forma

$$y_\alpha^\beta(t,u) = \frac{|\csc\alpha|}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-j\left(\frac{t^2+u^2}{2}\right)\cot\alpha + jtu\csc\alpha + j\varphi(u)} e^{-\frac{(t-u\cos\alpha)^2}{2[\sigma(u)\sin\alpha]^2}} \tag{5}$$

com os parâmetros $\sigma(u)$ e $\varphi(u)$ a serem obtidos em termos da FRFT do sinal, conforme veremos adiante.

A operação $\star$, na Eq. (3), denota uma convolução generalizada, definida por Zayed [5] como segue: Para qualquer função $f(t)$, define-se $\tilde{f}(t) = e^{j\frac{\cot\alpha}{2}t^2} f(t)$. Dadas duas funções, f e g, a sua convolução generalizada é então obtida como

$$h(t) = (f \star g)(t) = \sqrt{\frac{1 - j\cot\alpha}{2\pi}} e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}t^2} (\tilde{f} * \tilde{g})(t) \tag{6}$$

onde $*$ denota a convolução tradicional,

$$(f * g)(t) = \int f(\tau) g(t-\tau) d\tau \tag{7}$$

Demonstra-se que, sendo F_α, G_α e H_α as transformadas fracionais de Fourier de f, g e h, respectivamente, vale a propriedade [5]

$$H_\alpha(u) = F_\alpha(u) G_\alpha(u) e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}u^2} \tag{8}$$

resultado que usaremos a seguir para obter as expressões para os parâmetros $\sigma(u)$ e $\varphi(u)$ da função de representação $y_\alpha^\beta(t,u)$, definida na Eq. (5).

Tomando a FRFT de ângulo α, nos dois lados da Eq. (3), nós obtemos

$$I_{\alpha+\beta}(u) \equiv \mathrm{FRFT}_\alpha\{I_\beta(t)\}(u) = \frac{e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}u^2}}{\sqrt{1-j\cot\alpha}} \int X_\alpha(u,u') Y_\alpha^\beta(u,u') e^{j\frac{\cot\alpha}{2}u'^2} du' \tag{9}$$

Mas, como demonstrado no Apêndice,

$$X_\alpha(u,u') \equiv \mathrm{FRFT}_\alpha\{x_\alpha(t,u')\}(u) = 2\pi\delta(u-u') \tag{10}$$

e

$$Y_\alpha^\beta(u,u') \equiv \mathrm{FRFT}_\alpha\{y_\alpha^\beta(t,u')\}(u) =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - j\cot\alpha}}{(2\pi)^{3/2}}\,\sigma(u')e^{j\left(\frac{u^2-u'^2}{2}\right)\cot\alpha - j(u-u')u'\cot\alpha + j\varphi(u')}e^{-\frac{\sigma^2(u')}{2}(u-u')^2} \tag{11}$$

Substituindo estas expressões para $X_\alpha(u, u')$ e $Y_\alpha^\beta(u, u')$ na Eq. (9), ela nos fornece

$$I_{\alpha+\beta}(u) \equiv |I_{\alpha+\beta}(u)|e^{j\varphi_{\alpha+\beta}(u)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma(u)e^{j\varphi(u)} \tag{12}$$

o que nos permite identificar

$$\sigma(u) = \sqrt{2\pi}|I_{\alpha+\beta}(u)|, \text{ e}$$

$$\varphi(u) = \varphi_{\alpha+\beta}(u) \tag{13}$$

2.2 Transformada Generalizada

Com base na função de representação da Eq. (3), nós podemos então definir a transformada de Gabor sintonizada, em sua forma generalizada, como

$$T_{\alpha,\beta}(u, t) = \frac{|\csc\alpha|}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int e^{j\left(\frac{\tau^2+u^2}{2}\right)\cot\alpha - j\tau u\csc\alpha - j\varphi(u)}e^{-\frac{(\tau-t-u\cos\alpha)^2}{2[\sigma(u)\sin\alpha]^2}}I_\beta(\tau)d\tau \tag{14}$$

com $\sigma(u)$ e $\varphi(u)$ dados pela Eq. (13).

A transformada sintonizada $T_{\alpha,\beta}(u, t)$ analisa a FRFT de ordem β de um sinal qualquer, $I_\beta(t)$, por meio de núcleos analisadores que são as funções de representação de $I_\beta(t)$, na forma da Eq. (5), cujos parâmetros são dados pela FRFT de ordem $\alpha + \beta$ do mesmo sinal.

3 Exemplos

Consideremos alguns casos particulares dos resultados acima:

i) Quando $\beta = 0$, $I_\beta(t) \equiv I_0(t)$ é o próprio sinal de entrada, $i(t) = |i(t)|e^{j\varphi_i(t)}$. Se tomarmos $\alpha = \frac{\pi}{2}$, teremos $I_{\alpha+\beta}(u) \equiv I_{\frac{\pi}{2}}(u) = \tilde{I}(u) = |\tilde{I}(u)|e^{j\varphi_{\tilde{I}}(u)}$. Neste caso, nós obtemos

Função de Base:

$$x_{\frac{\pi}{2}}(t, u) = \sqrt{2\pi}e^{jtu} \tag{15}$$

Função de Representação:

$$y^{0}_{\frac{\pi}{2}}(t,u) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{j[tu+\varphi(u)]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(u)}} \tag{16}$$

com $\sigma(u) = \sqrt{2\pi}|I_{\pi/2}(u)| \equiv \sqrt{2\pi}|\tilde{I}(u)|$, e $\varphi(u) = \varphi_{\tilde{I}}(u)$.

A convolução generalizada (Eq. 6) torna-se simplesmente

$$(f \star g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)(t) \tag{17}$$

e a representação do sinal (Eq. (3)) é obtida como

$$i(t) \equiv \mathrm{FRFT}_0\{i(t')\}(t) = \int e^{jtu'} * \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{j[tu'+\varphi(u')]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(u')}} du' \tag{18}$$

A representação acima corresponde àquela associada à primeira forma da transformada de Gabor sintonizada, que equivale portanto a $T_{\frac{\pi}{2},0}(u,t)$.

ii) Quando $\beta = \frac{\pi}{2}$, $I_\beta(t) \equiv I_{\frac{\pi}{2}}(t) = \tilde{I}(t)$. Se tomarmos $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, teremos $I_{\alpha+\beta}(u) \equiv I_0(u) = i(u)$. Neste caso, obtemos

Função de Base:

$$x_{-\frac{\pi}{2}}(t,u) = \sqrt{2\pi} e^{-jtu} \tag{19}$$

Função de Representação:

$$y^{\frac{\pi}{2}}_{-\frac{\pi}{2}}(t,u) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-j[tu-\varphi(u)]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(u)}} \tag{20}$$

com $\sigma(u) = \sqrt{2\pi}|I_0(u)| \equiv \sqrt{2\pi}|i(u)|$, e $\varphi(u) = \varphi_i(u)$.

A convolução generalizada permanece dada pela Eq. (15), e a representação do sinal é então obtida como

$$\tilde{I}(t) \equiv \mathrm{FRFT}_{\pi/2}\{i(t')\}(t) = \int e^{-jtu'} * \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-j[tu'-\varphi(u')]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(u')}} du' \tag{21}$$

que é, a menos de um fator multiplicativo, a representação associada à segunda forma da transformada de Gabor sintonizada introduzida em [1], que corresponde a $T_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}(u,t)$.

iii) Quando $\alpha = 0$, a função de representação toma a forma (ver Apêndice)

$$y_0^\beta(t,u) = \frac{1}{2\pi}\sigma(u)e^{j\varphi(u)}\delta(t-u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|I_\beta(u)|e^{j\varphi_\beta(u)}\delta(t-u) \tag{22}$$

e a representação do sinal (Eq. (3)) se reduz à identidade

$$I_\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma(t)e^{j\varphi(t)} = |I_\beta(t)|e^{j\varphi_\beta(t)} \tag{23}$$

onde usamos a Eq. (13).

A transformada sintonizada (Eq. (14)) torna-se então

$$T_{0,\beta}(u,t) = \int I_\beta^*(\tau - t)I_\beta(\tau)\delta(\tau - t - u)d\tau = I_\beta^*(u)I_\beta(t+u) \tag{24}$$

e a integral de $T_{0,\beta}(u,t)$ sobre todos os valores de u fornece a autocorrelação do sinal I_β.

4 Conclusão

Neste relatório, nós mostramos como o formalismo de representação e análise de sinais com base em funções de Gabor sintonizadas, introduzido em [1], pode ser generalizado com o uso da transformada fracional de Fourier. As duas versões para a transformada sintonizada apresentadas naquele trabalho foram demonstradas reduzir-se, juntamente com as funções de representação associadas, a casos particulares do formalismo mais geral aqui desenvolvido. Este possibilita a definição de uma infinidade de outras versões para a transformada de Gabor sintonizada, cuja aplicação prática nós estamos estudando. A transformada canônica linear [6], que tem a transformada fracional de Fourier como caso particular, representa uma possibilidade de extensão ainda mais ampla para a nossa abordagem.

Apêndice

Inicialmente, nós demonstramos as expressões para as FRFTs da função de base e da função de representação, Eqs. (10) e (11). Usando a Eq. (1), e a definição de $x_\alpha(t,u)$ na Eq. (4), nós obtemos

$$X_\alpha(u,u') = |\csc\alpha| e^{j\frac{\cot\alpha}{2}(u^2-u'^2)} \int e^{-jt(u-u')\csc\alpha} dt \tag{25}$$

e, identificado a integral como $2\pi\delta[(u-u')\csc\alpha] \equiv 2\pi\delta(u-u')/|\csc\alpha|$, a Eq. (10) resulta.

Do mesmo modo, usando a definição de $y_\alpha(t,u)$ na Eq. (1), nós obtemos

$$Y_\alpha^\beta(u,u') = |\csc\alpha|\sqrt{1-j\cot\alpha}\frac{e^{j\frac{\cot\alpha}{2}(u^2-u'^2)}}{(2\pi)^2} \int e^{-jt(u-u')\csc\alpha} e^{-\frac{(t-u'\cos\alpha)^2}{2[\sigma(u')\sin\alpha]^2}} dt \tag{26}$$

e a integral pode ser obtida como $\sqrt{2\pi}\sigma(u')|\sin\alpha| e^{-j(u-u')u'\cot\alpha} e^{-\frac{\sigma^2(u')}{2}[(u-u')\csc\alpha]^2}$, de onde a Eq. (11) resulta.

Agora nós obteremos o limite, quando $\alpha \to 0$, da função de representação $y_\alpha^\beta(t,u)$, demonstrando a Eq. (22). Neste limite, nós temos que $\sin\alpha$ tende a α, $\cos\alpha$ tende a 1, e $\csc\alpha$ e $\cot\alpha$ tendem ambos a $1/\alpha$. Assim, $y_0^\beta(t,u)$ pode ser escrita como

$$y_0^\beta(t,u) = \frac{e^{j\varphi(u)}}{\alpha(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2\alpha^2\sigma^2(u)}[1+j\alpha\sigma^2(u)]} \tag{27}$$

ou seja,

$$y_0^\beta(t,u) = \frac{\Sigma}{\alpha}\frac{e^{j\varphi(u)}}{2\pi}\frac{e^{-\frac{(t-u)^2}{2\Sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\Sigma} \tag{28}$$

onde

$$\Sigma = \frac{\alpha\sigma(u)}{\sqrt{1+j\alpha\sigma^2(u)}} \tag{29}$$

No limite de $\alpha \to 0$, Σ tende a zero, a Gaussiana na Eq. (28) tende à função delta, e nós obtemos o resultado na Eq. (22):

$$y_0^\beta(t,u) = \frac{1}{2\pi}\sigma(u)e^{j\varphi(u)}\delta(t-u) \tag{30}$$

Para demonstrar que, neste limite, a representação do sinal se reduz à identidade (Eq. (23)), nós observamos inicialmente que a convolução generalizada de $x_\alpha(t,u)$ e $y_\alpha^\beta(t,u)$ pode ser reescrita como

$$\sqrt{\frac{\alpha-j}{2\pi\alpha}}\int x_\alpha(\tau,u)y_\alpha^\beta(t-\tau,u)e^{\frac{j}{\alpha}\tau(\tau-t)}d\tau \tag{31}$$

quando $\alpha \to 0$, enquanto a função de representação, $x_\alpha(t,u)$, tende para

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha^2-j\alpha}}e^{-\frac{j}{2\alpha}(t-u)^2} \tag{32}$$

Substituindo as Eqs. (30) a (32) na Eq. (5), nós obtemos

$$I_\beta(t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha^2-j\alpha}}\int\left[\int e^{-\frac{j}{2\alpha}(\tau-u')^2}\sigma(u')e^{j\varphi(u')}\delta(t-\tau-u')e^{\frac{j}{\alpha}\tau(\tau-t)}d\tau\right]e^{j\frac{u'^2}{2\alpha}}du' \tag{33}$$

e, integrando sobre τ,

$$I_\beta(t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha^2-j\alpha}}\int\sigma(u')e^{j\varphi(u')}e^{-j\frac{(t-u')^2}{2\alpha}}du' \tag{34}$$

No limite de $\alpha \to 0$, nós podemos reescrever a equação acima como

$$I_\beta(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\sigma(u')e^{j\varphi(u')}\frac{e^{-\frac{(t-u')^2}{2(-j\alpha)}}}{\sqrt{2\pi(-j\alpha)}}du' \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\sigma(u')e^{j\varphi(u')}\delta(t-u')du' \tag{35}$$

e, portanto,

$$I_\beta(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma(t)e^{j\varphi(t)} \tag{36}$$

conforme a Eq. (23).

Referências Bibliográficas

[1] J.R.A. Torreão e S.M.C. Victer, A transformada de Gabor sintonizada, Pré-publicação D067/2009, IMPA, Rio de Janeiro. Disponível em http://www.preprint.impa.br/FullText/67_Thu_Jan_7_18_14_51_BRDT_2010/Relatorio-TecnicoTorreaoVicter.PDF

[2] L. Cohen, *Time-Frequency Analysis*, 3^{rd} Edition, Prentice-Hall PTR, 1995

[3] L.B. Almeida, The fractional Fourier transform and time-frequency representations, IEEE Trans. Signal Processing 42 (1994) 3084-3091.

[4] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M.A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing*, Wiley, 2001.

[5] A.I. Zayed, A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform, IEEE Signal Processing Letters 5(4) (1998) 101-103.

[6] K.B. Wolf, *Integral Transforms in Science and Engineering*, Plenum Press, 1979.